Torziona divergencija trapeznog krila

Metod karakterističnog preseka – proračunski primer za V134

1 Tekst zadatka

Razmatra se pravo, trapezno krilo, raspona $b = 10$ m, čija se tetiva linearno menja od $l_s = 0{,}8$ m u korenu do $l_n = 0{,}5$ m na vrhu. Površina krila **nije unapred zadata**: potrebno ju je izračunati iz geometrije trapeza i koristiti u usvojenoj jednačini brzine divergencije.

Noseću strukturu predstavlja **jednoćelijska tankozidna pravougaona torziona kutija**. Prednja ramenjača nalazi se na $x_1/l = 0{,}15$, a zadnja na $x_2/l = 0{,}65$ lokalne tetive. Visina kutije je $h(y) = \bar{h}\, l(y)$, gde je $\bar{h} = 0{,}12$. Debljine oba zida ramenjača i obe oplate jednake su $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = 0{,}001$ m. Za materijal je zadat modul klizanja $G = 2{,}769 \cdot 10^{10}$ Pa i gustina $\rho_m = 2700$ kg/m^3.

Karakteristični presek nalazi se na $y_k = \eta(b/2)$, gde je $\eta = 0{,}70$. Koeficijent uzgona pri napadnom uglu $\alpha = 18^\circ$ iznosi $C_z = 1{,}5$. Pretpostaviti da je $C_z(\alpha)$ linearna funkcija koja prolazi kroz koordinatni početak. Relativno odstojanje aerodinamičkog centra i centra smicanja zadaje se kao $e = 0{,}25$, tako da se **stvarni krak računa prema lokalnoj tetivi karakterističnog preseka**, $e\, l_k$. Gustina vazduha je $\rho = 1{,}225$ kg/m^3.

Odrediti: površinu krila S; geometriju i torzionu konstantu kutije $J(y)$; ekvivalentnu torzionu krutost $C_{\theta\theta}$ od korena do karakterističnog preseka; brzinu torzione divergencije V_D prema usvojenom modelu karakterističnog preseka. Dodatno izračunati masu idealizovane kutije i prikazati empirijski korigovane vrednosti za klasu *GA avion (Cessna 172)*, za koju program V134 koristi $\gamma = 0{,}75$.

Dodatno objašnjenje: karakteristični presek i izbor $\eta = 0{,}70$

Šta je karakteristični presek? U metodu karakterističnog preseka raspodeljeni aeroelastički problem krila zamenjuje se pojednostavljenim modelom u kome se uvijanje i aerodinamičko dejstvo predstavljaju preko jednog izabranog preseka. Njegov položaj meri se koordinatom y_k, od uklještenog korena polukrila ka vrhu. Bezdimenzioni parametar η definiše taj položaj:

$$\boxed{y_k = \eta \frac{b}{2}}, \qquad 0 < \eta \leq 1. \tag{1}$$

Vrednost $\eta = 0$ odgovarala bi korenu, $\eta = 1$ vrhu polukrila, a $\eta = 0{,}70$ preseku na 70% rastojanja od korena do vrha. Za raspon $b = 10$ m dobijamo

$$\frac{b}{2} = 5 \text{ m}, \qquad y_k = 0{,}70 \cdot 5 = \boxed{3{,}5 \text{ m}}. \tag{2}$$

U ovom preseku lokalna tetiva je $l_k = 0{,}59$ m, širina kutije $l_{\text{box},k} = 0{,}295$ m, a usvojeni aerodinamički krak $e\, l_k = 0{,}1475$ m. Ove vrednosti se zatim koriste u proračunu torzione krutosti i brzine divergencije.

Zašto baš 70% **poluraspona?** Ovde je $\eta = 0{,}70$ *unapred usvojena referentna vrednost* radi prikaza metode i poređenja sa programom V134, a ne položaj koji je izveden iz raspodele uzgona ili dokazan kao univerzalno optimalan. Izbor preseka u spoljašnjem delu polukrila omogućava da se u

ilustrativni račun uključi podatljivost značajnog dela raspona, a da se ne posmatra isključivo krajnji presek. Stvarni reprezentativni položaj može zavisiti od raspodele aerodinamičkog opterećenja, torzione krutosti, položaja ose elastičnosti i načina aproksimacije deformacije.

Kako η utiče na račun? U modelu V134 ugao uvijanja pri konstantnom probnom torzionom momentu računa se integracijom od korena do karakterističnog preseka:

$$\theta = M_t \int_0^{\eta b/2} \frac{dy}{GJ(y)}, \qquad C_{\theta\theta}(\eta) = \left[\int_0^{\eta b/2} \frac{dy}{GJ(y)} \right]^{-1}. \tag{3}$$

Kada se η povećava, raste dužina integracije i torziona podatljivost, pa ekvivalentna krutost opada (za pozitivno GJ). Istovremeno se kod suženog krila smanjuje lokalna tetiva l_k i menja aerodinamički krak $e\,l_k$. Zato promena η utiče na izračunatu brzinu divergencije kroz *oba* ova efekta; ona nije čista materijalna ili konstrukciona konstanta.

Napomena

Vrednost $\eta = 0{,}70$ nije opšte aerodinamičko pravilo. Za konkretno krilo izbor karakterističnog preseka trebalo bi obrazložiti raspodelom opterećenja ili proveriti poređenjem sa raspodeljenim aeroelastičkim modelom (npr. metodom Galerkina). Parametar η određuje *položaj preseka*, dok faktor γ, uveden u narednom dodatku, predstavlja *odvojenu empirijsku korekciju* programskog rezultata. Njih ne treba poistovećivati.

Dodatno objašnjenje: faktor korekcije γ i klase letelica

U programu V134, osim osnovnog proračuna brzine torzione divergencije, postoji mogućnost izbora *klase letelice*. Izabranoj klasi pridružuje se bezdimenzioni faktor γ, koji u okviru programskog modela predstavlja **empirijski faktor efektivne torzione dužine**. Njime se uvodi dodatna, pojednostavljena korekcija ekvivalentne torzione krutosti i brzine divergencije. Faktor γ **nije** modul materijala, geometrijski koeficijent preseka niti položaj karakterističnog preseka η.

Program definiše referentnu i korigovanu efektivnu torzionu dužinu kao

$$L_{t,\mathrm{ref}} = \frac{b}{2}, \qquad L_{t,\mathrm{eff}} = \gamma \frac{b}{2}. \tag{4}$$

Na osnovu *usvojene programske korekcije*, polazeći od već izračunate krutosti $C_{\theta\theta}$ i brzine V_D, dobijaju se

$$\boxed{C_{\theta\theta,\mathrm{korr}} = \frac{C_{\theta\theta}}{\gamma}}, \qquad \boxed{V_{D,\mathrm{korr}} = \frac{V_D}{\sqrt{\gamma}}}. \tag{5}$$

Kada je $0 < \gamma < 1$, prema ovom modelu korigovana krutost i brzina divergencije veće su od osnovnih vrednosti. Na primer, $\gamma = 0{,}75$ daje $L_{t,\mathrm{eff}} = 0{,}75(b/2)$, povećanje korigovane krutosti za 33,33% i povećanje korigovane brzine za približno 15,47%. Ove promene predstavljaju posledicu *definicije korekcije*, a ne nezavisno dokazano ponašanje određene klase letelica.

Napomena

Vrednosti iz tabele su **unapred usvojene vrednosti unutar programa V134**. Nisu univerzalne konstante navedenih klasa letelica i u priloženom primeru nisu kalibrisane na osnovu eksperimentalnih podataka ili detaljnog aeroelastičkog modela. Opsezi predstavljaju programski zadate orijentacione intervale, a ne potvrđene statističke ili projektantske granice. Za preliminarni račun korisno je prikazati i *osnovni* rezultat bez korekcije; za projektantsku primenu faktor bi trebalo posebno obrazložiti i validirati.

Tabela 1: Usvojeni faktori γ u programu V134 za različite klase letelica. Opsezi i centralne vrednosti preuzeti su iz programske baze korekcija.

Klasa letelice	γ	Usvojeni opseg	$L_{t,\mathrm{eff}}$
UAV (mali/srednji)	0,80	0,70–0,90	$0{,}80\,(b/2)$
Jedrilica	0,90	0,80–1,00	$0{,}90\,(b/2)$
STOL / visokokrilni avion	0,90	0,80–0,95	$0{,}90\,(b/2)$
GA avion (Cessna 172)	0,75	0,70–0,85	$0{,}75\,(b/2)$
Regionalni turboprop	0,70	0,65–0,80	$0{,}70\,(b/2)$
Transportni avion	0,70	0,60–0,80	$0{,}70\,(b/2)$
Poslovni mlaznjak	0,65	0,60–0,75	$0{,}65\,(b/2)$
Lovački avion	0,60	0,50–0,70	$0{,}60\,(b/2)$

U ovom zadatku bira se **GA avion (Cessna 172)**, pa se uzima $\gamma = 0{,}75$. Njegova primena objašnjena je numerički u Koraku 9. Faktor $\eta = 0{,}70$ i dalje nezavisno određuje položaj karakterističnog preseka $y_k = \eta(b/2)$; izbor γ taj položaj ne menja.

Tabela 2: Ulazni podaci referentnog primera V134.

Veličina	Usvojena vrednost
Raspon i tetive	$b = 10$ m; $l_s = 0{,}8$ m; $l_n = 0{,}5$ m
Položaji ramenjača	$x_1/l = 0{,}15$; $x_2/l = 0{,}65$
Relativna visina i debljine	$\bar{h} = 0{,}12$; $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = 0{,}001$ m
Karakteristični presek	$\eta = 0{,}70$
Materijal	$G = 2{,}769 \cdot 10^{10}$ Pa; $\rho_m = 2700$ kg/m^3
Aerodinamički podaci	$C_z = 1{,}5$ pri $\alpha = 18°$; $e = 0{,}25$
Vazduh	$\rho = 1{,}225$ kg/m^3
Korekcija klase (samo dodatni rezultat)	$\gamma = 0{,}75$

2 Rešenje korak po korak

2.1 Korak 1. Površina trapeznog krila

Geometrijska površina celog trapeznog krila automatski se određuje iz ukupnog raspona i dužina krajnjih tetiva:

$$S = \frac{l_s + l_n}{2}\, b = \frac{0{,}8 + 0{,}5}{2} \cdot 10 = \boxed{6{,}5\ \mathrm{m}^2}. \tag{6}$$

Ova vrednost se u V134 koristi direktno u imenitelju *usvojene* formule za divergenciju; ne unosi se zasebno.

2.2 Korak 2. Gradijent uzgona

Uz pretpostavku linearnosti i $C_z(0) = 0$ sledi

$$\alpha_{\mathrm{rad}} = 18\frac{\pi}{180} = 0{,}314159\ \mathrm{rad}, \qquad C_{z_\alpha} = \frac{dC_z}{d\alpha} \approx \frac{1{,}5}{0{,}314159} = \boxed{4{,}774648\ \mathrm{rad}^{-1}}. \tag{7}$$

Ovo je sekantni nagib između $(0, 0)$ i zadate tačke, koji se u ovom zadatku poistovećuje sa gradijentom uzgona.

2.3 Korak 3. Promena tetive i karakteristični presek

Poluraspon je $L = b/2 = 5$ m. Za linearno suženje:

$$k = \frac{l_s - l_n}{L} = \frac{0{,}8 - 0{,}5}{5} = 0{,}06, \qquad l(y) = l_s - ky = 0{,}8 - 0{,}06y. \tag{8}$$

Položaj i lokalna tetiva karakterističnog preseka su

$$y_k = \eta L = 0{,}70 \cdot 5 = \boxed{3{,}5 \text{ m}}, \tag{9}$$

$$l_k = l(y_k) = 0{,}8 - 0{,}06 \cdot 3{,}5 = \boxed{0{,}59 \text{ m}}. \tag{10}$$

2.4 Korak 4. Dimenzije pravougaone torzione kutije

Rastojanje između ramenjača iznosi $r = (x_2/l - x_1/l) = 0{,}65 - 0{,}15 = 0{,}50$. Dakle, **širina kutije nije cela tetiva**, nego

$$l_{\text{box}}(y) = r\, l(y) = 0{,}50\, l(y), \qquad h(y) = 0{,}12\, l(y). \tag{11}$$

Površina omeđena srednjom linijom zatvorene konture je

$$A(y) = l_{\text{box}}(y) h(y) = 0{,}50 \cdot 0{,}12\, l(y)^2 = 0{,}06\, l(y)^2. \tag{12}$$

U karakterističnom preseku:

$$l_{\text{box},k} = 0{,}50 \cdot 0{,}59 = \boxed{0{,}295 \text{ m}}, \tag{13}$$

$$h_k = 0{,}12 \cdot 0{,}59 = \boxed{0{,}0708 \text{ m}}, \tag{14}$$

$$A_k = 0{,}295 \cdot 0{,}0708 = \boxed{0{,}020886 \text{ m}^2}. \tag{15}$$

2.5 Korak 5. Konturni integral i torziona konstanta

Za tankozidni jednoćelijski zatvoreni presek koristi se Bredt–Bathova relacija

$$J(y) = \frac{4A(y)^2}{\delta(y)}, \qquad \delta(y) = \oint \frac{ds}{t}. \tag{16}$$

Pošto su sve debljine jednake, integral po četiri stranice je

$$\delta(y) = \frac{h(y)}{t_1} + \frac{l_{\text{box}}(y)}{t_2} + \frac{h(y)}{t_3} + \frac{l_{\text{box}}(y)}{t_4} \tag{17}$$

$$= \left[0{,}12\left(\frac{1}{0{,}001} + \frac{1}{0{,}001}\right) + 0{,}50\left(\frac{1}{0{,}001} + \frac{1}{0{,}001}\right)\right] l(y) \tag{18}$$

$$= 1240\, l(y). \tag{19}$$

Sledi

$$J(y) = \frac{4[0{,}06 l(y)^2]^2}{1240 l(y)} = \frac{0{,}0144}{1240}\, l(y)^3 \tag{20}$$

$$= \boxed{1{,}1612903226 \cdot 10^{-5}\, (0{,}8 - 0{,}06y)^3 \text{ m}^4}. \tag{21}$$

Ovde brojčani koeficijent podrazumeva debljine unete u metrima. U karakterističnom preseku:

$$\delta_k = 1240 \cdot 0{,}59 = \boxed{731{,}6}, \qquad J_k = \frac{4(0{,}020886)^2}{731{,}6} = \boxed{2{,}38504645 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4}. \tag{22}$$

2.6 Korak 6. Torziona podatljivost i krutost do preseka y_k

Za model sa konstantnim torzionim momentom M_t na intervalu od korena do y_k važi

$$\theta = M_t \int_0^{y_k} \frac{dy}{GJ(y)}, \qquad C_{\theta\theta} = \frac{M_t}{\theta} = \left[\int_0^{y_k} \frac{dy}{GJ(y)}\right]^{-1}. \tag{23}$$

Pošto je $J(y) = J_0 l(y)^3$, gde je $J_0 = 1{,}1612903226 \cdot 10^{-5}$ m, sledi

$$C_{\theta\theta} = \frac{GJ_0}{I}, \qquad I = \int_0^{3{,}5} \frac{dy}{(0{,}8 - 0{,}06y)^3}. \tag{24}$$

Smenom $z = 0{,}8 - 0{,}06y$ dobija se

$$I = \frac{1}{2 \cdot 0{,}06}\left(\frac{1}{0{,}59^2} - \frac{1}{0{,}8^2}\right) \tag{25}$$

$$= \boxed{10{,}918647659 \text{ m}^{-2}}. \tag{26}$$

Prema tome:

$$C_{\theta\theta} = \frac{2{,}769 \cdot 10^{10} \cdot 1{,}1612903226 \cdot 10^{-5}}{10{,}918647659} \tag{27}$$

$$= \boxed{29\,450{,}652 \text{ N m/rad}}. \tag{28}$$

2.7 Korak 7. Aerodinamički krak

U V134 se relativno odstojanje $e = 0{,}25$ odnosi na **lokalnu aerodinamičku tetivu**, a ne na korensku tetivu:

$$e\, l_k = 0{,}25 \cdot 0{,}59 = \boxed{0{,}1475 \text{ m}}. \tag{29}$$

Time se ovaj proračun razlikuje od ranije verzije primera u kojoj je korišćeno $0{,}25 \cdot 0{,}8 = 0{,}2$ m.

2.8 Korak 8. Brzina divergencije bez korekcije

U pojednostavljenom modelu karakterističnog preseka aerodinamički moment koji nastaje usled dodatnog uvijanja je

$$M_a = q\, S\, C_{z_\alpha}\, \theta\, (e\, l_k), \qquad q = \frac{1}{2}\rho V^2. \tag{30}$$

Ovde se, **prema definiciji modela u V134**, koristi ukupna geometrijska površina $S = 6{,}5$ m^2 kao usvojena referentna površina u izrazu za ekvivalentni aerodinamički moment. Uslov divergencije je

$$C_{\theta\theta} = q_D S C_{z_\alpha}(e\, l_k), \qquad \boxed{V_D = \sqrt{\frac{2C_{\theta\theta}}{\rho C_{z_\alpha} S(e\, l_k)}}}. \tag{31}$$

Zamenom numeričkih vrednosti:

$$\rho C_{z_\alpha} S(e\, l_k) = 1{,}225 \cdot 4{,}774648293 \cdot 6{,}5 \cdot 0{,}1475 = 5{,}607675212, \tag{32}$$

$$V_D = \sqrt{\frac{2 \cdot 29\,450{,}6518}{5{,}607675212}} = \boxed{102{,}487530 \text{ m/s}}. \tag{33}$$

U kilometrima na čas:

$$V_D \cdot 3{,}6 = \boxed{368{,}955 \text{ km/h}}. \tag{34}$$

2.9 Korak 9. Empirijska korekcija klase aviona

Program V134 prikazuje i *dodatni*, korigovani rezultat za izabranu klasu aviona. Za *GA avion (Cessna 172)* usvojeno je $\gamma = 0{,}75$. Interna definicija korekcije u programu glasi

$$L_{t,\mathrm{ref}} = b/2 = 5\ \mathrm{m}, \qquad L_{t,\mathrm{eff}} = \gamma(b/2) = 3{,}75\ \mathrm{m}, \tag{35}$$

$$C_{\theta\theta,\mathrm{korr}} = \frac{C_{\theta\theta}}{\gamma} = \frac{29\,450{,}6518}{0{,}75} = \boxed{39\,267{,}536\ \mathrm{N\,m/rad}}, \tag{36}$$

$$V_{D,\mathrm{korr}} = \frac{V_D}{\sqrt{\gamma}} = \frac{102{,}487530}{\sqrt{0{,}75}} = \boxed{118{,}342\ \mathrm{m/s}} = \boxed{426{,}033\ \mathrm{km/h}}. \tag{37}$$

Napomena

Faktor γ ovde je *empirijska programska korekcija*, a ne rezultat nezavisno izvedenog aeroelastičkog modela. Osnovna vrednost za poređenje sa analitičkim primerom jeste V_D **bez korekcije**.

2.10 Korak 10. Zapremina i masa idealizovane kutije

Površina materijala zidova tankozidne kutije po jedinici raspona, uz zanemarivanje preklopa na uglovima, iznosi

$$A_m(y) = h(y)(t_1 + t_3) + l_{\mathrm{box}}(y)(t_2 + t_4) \tag{38}$$

$$= [0{,}12(0{,}001 + 0{,}001) + 0{,}50(0{,}001 + 0{,}001)]\, l(y) \tag{39}$$

$$= 0{,}00124\, l(y). \tag{40}$$

Za oba polukrila:

$$\mathcal{V} = 2\int_0^5 A_m(y)\, dy = 2 \cdot 0{,}00124 \int_0^5 (0{,}8 - 0{,}06y)\, dy \tag{41}$$

$$= 2 \cdot 0{,}00124 \cdot 3{,}25 = \boxed{0{,}00806\ \mathrm{m}^3}, \tag{42}$$

$$m = \rho_m \mathcal{V} = 2700 \cdot 0{,}00806 = \boxed{21{,}762\ \mathrm{kg}}. \tag{43}$$

Ovo je masa **idealizovanih zidova i oplata torzione kutije**, bez rebara, spojeva, dodatnih elemenata strukture i opreme.

3 Uporedni pregled sa V134

Rezultat

$$\boxed{\begin{array}{ll} S = 6{,}5\ \mathrm{m}^2, & C_{\theta\theta} = 29\,450{,}652\ \mathrm{N\,m/rad}, \\ V_D = 102{,}488\ \mathrm{m/s}, & V_{D,\mathrm{korr}} = 118{,}342\ \mathrm{m/s}. \end{array}}$$

Napomena

Ovaj primer služi za numeričku proveru *implementiranog* modela karakterističnog preseka. Upotreba ukupne geometrijske površine krila u jednačini ekvivalentnog aerodinamičkog momenta predstavlja pretpostavku tog modela. Numeričko poklapanje sa programom ne predstavlja zasebnu potvrdu fizičke tačnosti modela za realno krilo.

Tabela 3: Očekivane vrednosti prikazane u V134 za unete podatke.

Izlazna veličina	Vrednost
Automatski izračunata površina S	6,500 m^2
Položaj preseka y_k	3,500 m
Lokalna tetiva l_k	0,590 m
Širina torzione kutije $l_{\mathrm{box},k}$	0,295 m
Torziona konstanta J_k	$2{,}38504645 \cdot 10^{-6}$ m^4
Ekvivalentna krutost $C_{\theta\theta}$	29 450,652 N m/rad
Korigovana krutost $C_{\theta\theta,\mathrm{korr}}$	39 267,536 N m/rad
Brzina divergencije bez korekcije	102,488 m/s
Brzina divergencije sa korekcijom	118,342 m/s
Masa idealizovane kutije	21,762 kg